

1. Végezzük el a függvényvizsgálatot, rajzoljuk le a függvényt! ($x \in \mathbb{R}$)

a) $a(x) := 2x^2 - x^4$

b) $b(x) := x + \frac{1}{x^2}$

c) $c(x) := (x + 3)e^{-x}$

d) $d(x) := 4x^3 - 12x$

e) $e(x) := x + \frac{1}{x}$

f) $f(x) := (x^2 - 3x + 1)e^x$

2. Adott az $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ kétváltozós függvény, $f(x, y) = \sin x \cdot \cos y$.

a) Adjuk meg a függvény x és y változói szerinti parciális deriváltjait!

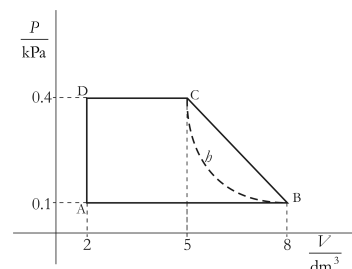
b) Írjuk fel a függvényt teljes differenciál formájában!

c) Adjuk meg a függvény a $\mathbf{v} = (1, 1)$ vektor irányának megfelelő, ún. iránymenti deriváltját az origóban!

3. Oldjuk meg a 2. feladatot a $g(x, y) = e^{-xy}$ függvényre is!

4. Egy vegyi üzem hetente x hordó nagy tisztaságú metánszulfonsavat ($x^3 - 6x^2 + 15x$) ezer € költséggel tud előállítani, és x hordó terméket $9x$ ezer € áron ad el. Számítsuk ki, mekkora legyen az optimális heti termelés a maximális profit eléréséhez! (A profitot definiáljuk mint a bevétel és a kiadás különbségét.)

5. Egy gáz halmazállapotú termodinamikai rendszerről kiderült, hogy annak energiáját bizonyos feltételek mellett az $U = 5PV + 10 \text{ J}$ egyenlet írja le. A rendszert az ábrán folytonos vonallal szemléltetett módon az $A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow D \rightarrow A$ cikluson vezetjük keresztül. Számítsuk ki



a) a rendszer belső energiáját az A, B, C és D pontokban;

b) a hő és a munka értékét a ciklus négy lépésére;

c) a hő és a munka értékét arra a folyamatra is, amikor a rendszer az ábrán szaggatott vonallal jelölt h görbe mentén jut el C-ből B-be (a h görbe egyenlete $h: P = \frac{0,4 \text{ kPa}}{\frac{V}{\text{dm}^3} - 4}$);

d) végül adjuk meg az adiabaták parametrikus egyenletét!

6. Egy gáz halmazállapotú termodinamikai rendszer energiáját az $U = 1,5PV$ egyenlet adja meg.

a) Számítsuk ki a hőt és a munkát arra a folyamatra, amelynek során a rendszer az A állapotból a B állapotba a $P(V) = 0,1 \text{ MPa} + 1000 \text{ MPa} \left(\frac{V}{\text{m}^3} - 0,02\right)^2$ parabolán végighaladva jut el, és az A állapotot $P_A = 0,2 \text{ MPa}$ nyomás és $V_A = 0,01 \text{ m}^3$ térfogat, a B állapotot pedig $P_B = 0,2 \text{ MPa}$ nyomás és $V_B = 0,03 \text{ m}^3$ térfogat jellemzi!

b) Adjuk meg az adiabaták (parametrikus) egyenletét a P – V síkon!

Emlékeztetőül.

— *Függvényvizsgálaton* – legalább – azt értjük, hogy a függvény értelmezési tartományának, értékkészletének, zérushelyeinek megállapítása után az első két derivált előjelét megvizsgálva meghatározzuk, hogy a függvény hol monoton, hol konvex, hol vannak lokális szélsőértékei, inflexió pontjai. Jó, ha ezek ismeretében le is rajzoljuk a függvény grafikonját. A függvényvizsgálat kiterjedhet a függvény korlátosságának, periodicitásának, paritásának, invertálhatóságának és aszimptotikus viselkedésének leírására is.

— Legyen $\mathbf{e}_i$ az i -edik egységvektor $\mathbb{R}^n$ -ben. Ekkor az $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ függvény i -edik változója szerinti parciális deriváltja az $\mathbf{x}_0$ pontban $\frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{x}_0) = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{f(\mathbf{x}_0 + \lambda \mathbf{e}_i) - f(\mathbf{x}_0)}{\lambda}$, ha ez a határérték létezik. Szerencsés esetben a határérték létezik, és ekkor pl. az $f(x, y)$ függvény x szerinti parciális deriváltját úgy számolhatjuk ki, hogy a függvényt megadó képletben y -t paraméternek tekintjük, és x szerint deriválunk. (Úgy teszünk tehát, mintha y az x szerinti deriválás szempontjából „konstans lenne”.)

— Egy $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ n -változós függvény *gradiensét* $\text{grad } f = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \right)$ alakban, vagyis a parciális deriváltak vektorba rendezésével adhatjuk meg. A függvény *teljes differenciáljának* a $df = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i$ alakú kifejezést nevezzük.

— Ha adott egy $f(x, y)$ kétváltozós függvény, amelynek értelmezési tartományán (az (x, y) síkon) ismerünk egy jól határozott P pontot, akkor e pontban a függvény egy $\mathbf{v}$ vektorral egyező irányú *iránymenti deriváltját* a $\mathbf{v}_1 \cdot \text{grad } f$ skalárszorzat P pontbeli meghatározásával állapíthatjuk meg. Itt $\mathbf{v}_1$ -t a $\mathbf{v}$ vektor 1-re normálásával kapjuk.

— Az itt tárgyaltakhoz hasonlóan egyszerű termodinamikai rendszerekben a belső energia két állapot közötti megváltozása a folyamat során a rendszer által termelt hő és a rendszer által végzett munka összege, vagyis $\Delta U = W + Q$, ahol W a térfogati munkát, Q a hőt jelöli. A térfogati munka egy folyamat során a kezdeti és a végállapot közötti integrálással, $W = -\int P dV$ alakban adható meg. Ez az integrál könnyen ki is számolható, ha P V -től való függése ismert – illetve még könnyebben kiszámolható, ha P egyáltalán nem is függ V -től, ekkor ugyanis egyszerűen $W = -P\Delta V$.

— *Adiabatának* az olyan görbét nevezzük, amelyen végighaladva a rendszer nem cserél hőt a környezetével, vagyis amelyre $Q = 0$. Ilyen egyszerű rendszerek esetén, ahol a belső energia megváltozása kizárólag munkavégzés vagy a környezettel való hőcseré útján mehetne végbe, az adiabatára teljesülnie kell, hogy azon $U(P, V)$ teljes differenciálja azonos a differenciális térfogati munkával ($-P dV$).

Néhány példa megoldása.

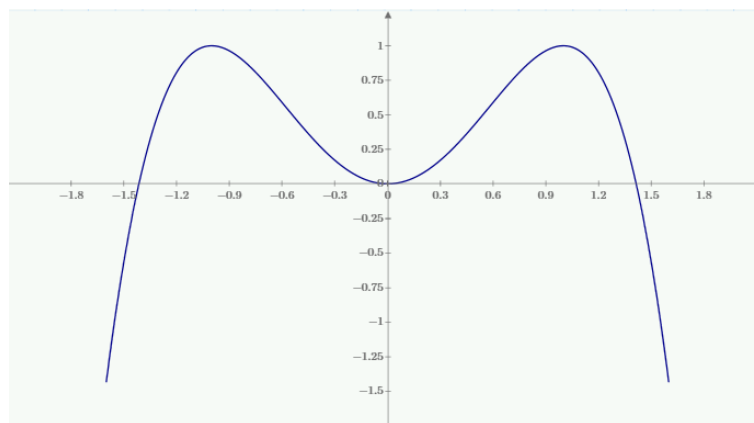
1/a) feladat. A függvény értelmezési tartománya a teljes $\mathbb{R}$ halmaz. A függvény három zérushelyét a $2x^2 - x^4 = 0$ egyenlet megoldásával 0-nál és $\pm\sqrt{2}$ -nél találjuk. A függvény első deriváltját felírva ($a'(x) = 4x - 4x^3$) megállapítható, hogy

- ha $x < -1$, a függvény szigorú monoton növekvő (az első derivált pozitív);
- ha $x = -1$, a függvénynek lokális maximuma van (az első derivált zérus, és pozitívból negatívba vált előjelet);
- ha $-1 < x < 0$, a függvény szigorú monoton csökkenő (az első derivált negatív);
- ha $x = 0$, a függvénynek lokális minimuma van (az első derivált zérus, és negatívból pozitívba vált előjelet);
- ha $0 < x < 1$, a függvény szigorú monoton növekvő (az első derivált pozitív);
- ha $x = 1$, a függvénynek lokális maximuma van (az első derivált zérus, és pozitívból negatívba vált előjelet);
- ha $x > 1$, a függvény szigorú monoton csökkenő (az első derivált negatív).

A második derivált ($a''(x) = 4 - 12x^2$) vizsgálatával megállapíthatjuk, hogy

- ha $x < -\frac{\sqrt{3}}{3}$, a függvény alulról konkáv (a második derivált negatív);
- ha $x = -\frac{\sqrt{3}}{3}$, a függvénynek inflexiós pontja van (a második derivált zérus);
- ha $-\frac{\sqrt{3}}{3} < x < \frac{\sqrt{3}}{3}$, a függvény alulról konvex (a második derivált pozitív);
- ha $x = \frac{\sqrt{3}}{3}$, a függvénynek inflexiós pontja van (a második derivált zérus);
- ha $x > \frac{\sqrt{3}}{3}$, a függvény alulról konkáv (a második derivált negatív).

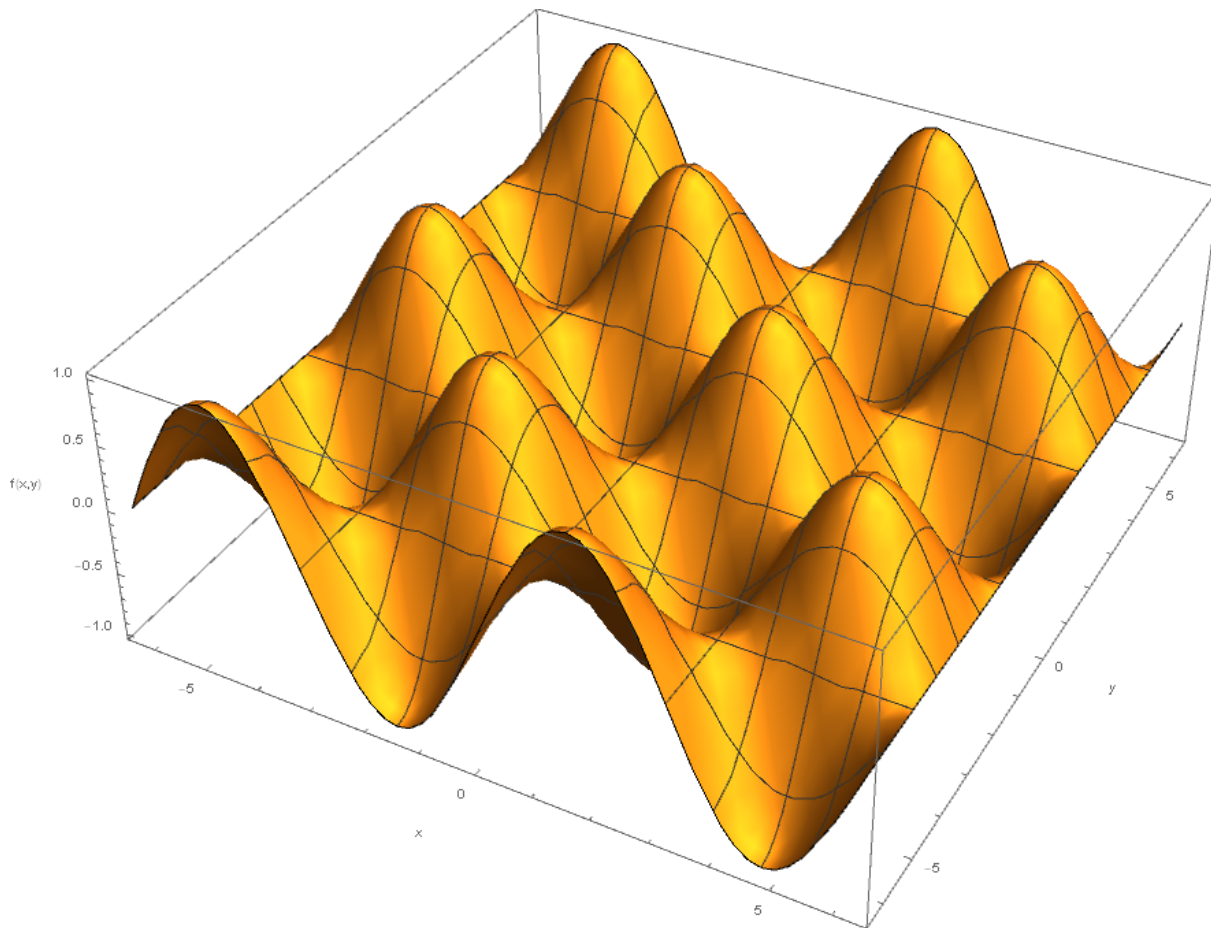
Mindez látható, ha fel is rajzoljuk a függvényt:



Az aszimptotikus viselkedés vizsgálatához határérték-számítást végzünk: $\lim_{x \rightarrow -\infty} a(x) = -\infty$ és $\lim_{x \rightarrow \infty} a(x) = -\infty$.

Megállapítjuk még, hogy a függvény értékkészlete az $y \leq 1$ halmaz; hogy a függvény globális maximumértéke $y = 1$, és ezt két helyen is felveszi ($x = \pm 1$); hogy a függvény ez alapján felülről korlátos; hogy a függvény páros, hiszen szimmetrikus az x tengelyre; hogy a függvény nem periodikus; illetve, hogy a függvény nem invertálható, hiszen több x helyhez is ugyanazt az y értéket rendel.

2. feladat. A függvény két változója szerinti parciálisa $\frac{\partial f}{\partial x} = \cos x \cdot \cos y$ és $\frac{\partial f}{\partial y} = -\sin x \cdot \sin y$. Ebből a teljes derivált $df = \cos x \cdot \cos y dx - \sin x \cdot \sin y dy$ alakban írható fel. A $\mathbf{v} = (1, 1)$ vektort 1-re normálva kapjuk, hogy $\mathbf{v}_1 = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, és így az iránymenti derivált: $\mathbf{v}_1 \text{ grad } f = \frac{\sqrt{2}(\cos x \cdot \cos y - \sin x \cdot \sin y)}{2}$; ennek origóbeli értéke $\frac{\sqrt{2}}{2}$. Bár ez a feladat megoldásának nem része, az $f(x, y)$ függvény egy lehetséges ábrázolása az (x, y) sík felett:



5. feladat. Az $U = 5PV + 10\text{ J}$ egyenletből, illetve P -nek és V -nek az ábráról leolvasható értékeiből a négy állapotot jellemző belső energiák: $U_A = 11\text{ J}$, $U_B = 14\text{ J}$, $U_C = 20\text{ J}$ és $U_D = 14\text{ J}$.

A rendszer A-ból B-be $P_{AB} = 0.1\text{ kPa}$ nyomáson izobár állapotváltozással jut el. A térfogatváltozás erre a folyamatra $\Delta_A^B V = 6\text{ dm}^3$, és így a térfogati munka értéke $W_A^B = -P_{AB} \cdot \Delta_A^B V = -0.6\text{ J}$. Mivel ugyanerre a folyamatra $\Delta_A^B U = 3\text{ J}$, a $\Delta U = Q + W$ egyenletből a hő $Q_A^B = 3,6\text{ J}$.

A B és C állapotok között az egyenes vonalon haladva az állapotváltozás ugyan nem izobár, a munka értéke grafikus integrálással mégis könnyen megállapítható: $W_{\text{Begyenes}}^C = 0,75\text{ J}$, és az előbbieket szerint számítva a hőt: $Q_{\text{Begyenes}}^C = 5,25\text{ J}$.

A C és D állapotok között megint izobár állapotváltozással van dolgunk, amelyre a munka $W_C^D = 1,2\text{ J}$, a hő pedig $Q_C^D = -7,2\text{ J}$.

Végül a D és A állapotok közötti állapotváltozás állandó térfogaton történik (izochór), ezért erre a munka $W_D^A = 0$, a hő pedig $Q_D^A = -3\text{ J}$, ez esetben azonos a belső energia-változással.

Hátravan még a munka és a hő meghatározása arra a folyamatra vonatkozóan, amikor a rendszer a C és B állapotok között (nem fordítva!) a h hiperbolán mozog. Ebben az esetben nem kerülhető el a munka integrálással történő meghatározása. Ehhez a

$W_{\text{Chiperbola}}^B = - \int_{V_C}^{V_B} P(V) dV$ integrált kell kiszámítanunk úgy, hogy az itt szereplő $P(V)$ függvény nem más, mint a hiperbola egyenlete. Felidézve, hogy $\int \frac{a}{x-b} dx = a \ln(x-b)$, az integrálás elvégezhető, és $W_{\text{Chiperbola}}^B = -0,5545\text{ J}$, valamint $Q_{\text{Chiperbola}}^B = -5,4455\text{ J}$.

Végül az adiabaták egyenletének megadásához induljunk ki a fundamentális egyenlet teljes deriváltjából: $dU = 5P dV + 5V dP$, illetve abból, hogy adiabatikus folyamatokra $dU = -P dV$. Ebből a $6P dV + 5V dP = 0$ differenciálegyenlethez jutunk, amelyet a változók szeparálásával integrálhatunk, és így azt találjuk, hogy a differenciálegyenletet a $V^6 P^5 = \text{konstans}$ görbesereg elégíti ki. Ez az adiabaták parametrikus egyenlete.