

- Az ELMŰ-től 22 Ft/kWh áron vásároljuk az áramot, amit arra használunk, hogy lakásunkat 25 °C-ra fűtsük a −2 °C-os téli hidegben. Számítsuk ki, a havi villanyszámla hány százalékát takarítanánk meg azzal, ha a vásárolt energiát *Joule*-hő közvetlen előállítása helyett inkább egy (ideális) Carnot-hőszivattyú működtetésére használnánk fel!
- Egy *Carnot*-féle hőerőgép maximális elméleti hatásfoka 75%, a gép egyik hőtartálya 200 °R hőmérsékletű. Adjuk meg a másik hőtartály hőmérsékletét, ha a 200 °R-es tartály a gép a) hidegebb b) melegebb hőtartálya!
- Bizonyos régi típusú ipari hűtők ammóniával működnek. Az alábbi táblázat az ammónia állapotát jellemzi egy négy pont által meghatározott ciklusban.

N ^o	T °C	P MPa	$\frac{v}{m^3 kg^{-1}}$	$\frac{u}{kJ kg^{-1}}$	$\frac{s}{kJ kg^{-1} K^{-1}}$	Fázisösszetétel
1	−24	0,1587	0,7385	1295,0	5,679	100% telített gőz
2	40	0,4247	0,3466	1395,0	5,679	100% túlhevített gőz
3	40	1,5550	0,0180	563,2	2,059	20,0% gőz, 80,0% folyadék
4	−24	0,1587	0,2431	472,2	2,059	32,8% gőz, 68,2% folyadék

- Számítsa ki a kvázisztatikus fajlagos hő és munka értékeket, valamint a fajlagos belső energia és a fajlagos szabadenergia megváltozását a ciklus mind a négy lépésére! A végeredményeket foglalja táblázatba!
- Állapítsa meg, mely állapotfüggvények különbségével számítható ki egyszerűbben a munka izoterm és adiabatikus állapotváltozások esetén!
- Számítsa ki a hűtési ciklus jósági tényezőjét a $\frac{-24\text{ °C-on elvont hő}}{\text{az ammónián végzett munka}}$ összefüggés szerint! Vajon miért óvakodtunk attól, hogy ezt a mennyiséget – amit jósági tényezőnek hívtunk –, hatásfoknak nevezzük?

- Egy vízzel működő erőműben a víz négy állapotát a következő táblázat adatai jellemzik. Számítsuk ki a ciklus négy lépésére a fajlagos munka és hő értékét! Eredményeinket foglaljuk táblázatba!

N ^o	Állapot és fázisösszetétel	T °C	P MPa	$\frac{v}{m^3 kg^{-1}}$	$\frac{u}{kJ kg^{-1}}$	$\frac{h}{kJ kg^{-1}}$	$\frac{s}{kJ kg^{-1} K^{-1}}$
1	40% folyadék, 60% gőz	300,0	8,581	0,01357	2071	2187	4,724
2	telített gőz	300,0	8,581	0,02167	2563	2749	5,704
3	túlhevített gőz	300,0	1,000	0,25790	2793	3051	7,123
4	telített gőz	120,5	0,2017	0,87880	2530	2707	7,123

- Mutassuk meg, hogy bármely termodinamikai rendszerre

$$dS = \frac{C_V}{T}dT + \frac{\alpha}{\kappa_T}dV!$$

- Az abszolút 0 hőmérsékleten a termodinamikai rendszerek entrópiája zérus, függetlenül a nyomástól. Adjuk meg a hőtágulási együttható (α) értékét 0 K-en!
- Mutassuk meg, hogy bármely termodinamikai rendszerre

$$\left(\frac{\partial H}{\partial P}\right)_T = V(1 - T\alpha)!$$

- Mutassuk meg, hogy ideális gázokban nem érvényesülhet a *Joule–Thomson*-hatás; vagyis, hogy ideális gázokra $\mu_{JT} = 0!$

Emlékeztetőül.

- Egy *Carnot*-gép hatásfoka: $\eta = 1 - \frac{T_h}{T_m}$, ahol T_h a hidegebb, T_m a melegebb hőtartály hőmérséklete.
- René Antoine Ferchault de Réaumur a róla elnevezett hőmérsékleti skála megalkotásakor a víz fagyáspontját 0 °R-nek, forráspontját 80 °R-nek tekintette.
- A *Maxwell*-relációk termodinamikai potenciálfüggvények második deriváltjai között fennálló kapcsolatokat adnak meg (vö. *Young*-tétel). A relációk általános alakja $\frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x_i}\right) = \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x_j}\right)$, ahol Φ valamilyen termodinamikai potenciál, amelynek x_i és x_j természetes változója. Belátható, hogy ha egy adott termodinamikai potenciálnak n számú természetes változója van, akkor arra $\frac{n(n-1)}{2}$ számú Maxwell-reláció írható fel. Néhány ilyen reláció:

$$\left(\frac{\partial T}{\partial V}\right)_S = -\left(\frac{\partial P}{\partial S}\right)_V \qquad \left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_T = \left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_V \qquad \left(\frac{\partial S}{\partial P}\right)_T = -\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_P$$

$$\left(\frac{\partial T}{\partial P}\right)_S = \left(\frac{\partial V}{\partial S}\right)_P \qquad \left(\frac{\partial T}{\partial P}\right)_V \left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_P - \left(\frac{\partial T}{\partial V}\right)_P \left(\frac{\partial S}{\partial P}\right)_V = 1 \qquad \left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_S \left(\frac{\partial V}{\partial S}\right)_T - \left(\frac{\partial P}{\partial S}\right)_T \left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_S = 1$$
- Az ún. *Euler*-féle „hármasszorzat” szabály vagy más néven *ciklikus szabály* értelmében, ha x , y és z három, egymástól függő termodinamikai változót jelöl, akkor $\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)_z \left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)_x \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_y = -1$.
- Az ún. *Joule–Thomson*-együttható: $\mu_{JT} \equiv \left(\frac{\partial T}{\partial P}\right)_H = \frac{V}{C_p}(\alpha T - 1)$. A *Joule–Thomson*-hatás inverziós hőmérsékletének nevezzük azt a T értéket, amely fölött egy gáz izentalpikus tágulása nem lehűléssel, hanem fölmelegedéssel jár.

Néhány példa megoldása.

- 1. feladat.** A Carnot-féle hőszivattyú jósági tényezője egy azonos hőmérsékletkülönbség mellett működtetett Carnot-gép hatásfokának reciproka. A jósági tényező így $\eta = \frac{T_m}{T_m - T_h} = 11,04$ formában számítható. Feltételezve, hogy a vásárolt energiát 100% hatékonysággal tudnánk a hőszivattyú működtetésére felhasználni (ugyanúgy, ahogy azt 100% hatásfokkal fordíthatjuk termikus energiává alakítva fűtésre is), a rezsi 90,94%-át takaríthatnánk meg.
- 3. feladat.** A levezetés mellőzésével az egyes folyamatokra kapott fajlagos munka, hő, belső energia-változás és szabadenergia-változás értékek a következők:

Folyamat	$\frac{w}{\text{kJ kg}^{-1}}$	$\frac{q}{\text{kJ kg}^{-1}}$	$\frac{\Delta u}{\text{kJ kg}^{-1}}$	$\frac{\Delta f}{\text{kJ kg}^{-1}}$
1 $\rightarrow$ 2	100,0	0,0	100,0	-263,5
2 $\rightarrow$ 3	301,8	-1133,6	-831,8	301,8
3 $\rightarrow$ 4	-91,0	0,0	-91,0	40,8
4 $\rightarrow$ 1	-79,1	901,9	822,8	-79,1

Látható, hogy a mechanikai munkát célszerű adiabatikus állapotváltozás esetén a belső energia, izoterm állapotváltozás esetén a szabadenergia megváltozásából kiszámítani. A hűtés jósági tényezőjét kiszámíthatjuk mint $\eta = \frac{901,9 \text{ kJ}}{100 \text{ kJ} + 301,8 \text{ kJ}} = 2,24$. Ezt az 1-nél nagyobb számot nem lenne célszerű hatásfoknak nevezni.

- 5. feladat.** Induljunk ki abból, hogy $S = S(T, V)$, és állítsuk elő a teljes differenciált $dS = \left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_V dT + \left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_T dV$ alakban! Mivel az állandó térfogaton vett hőkapacitás definíciója szerint $C_V = T \left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_V$, látható, hogy az első tagban dT szorzója valóban $\frac{C_V}{T}$. A második tagban dV szorzójaként szereplő $\left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_T$ parciális kifejtéséhez pedig használjuk ki, hogy $\left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_T = \left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_V$ (ami egy Maxwell-reláció); illetve, hogy $\left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_V = -\frac{\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_P}{\left(\frac{\partial V}{\partial P}\right)_T}$ (ami az Euler-féle hármas szorzat szabályból következik). Idézzük fel az izobár hőtágulási együttható $\alpha = \frac{1}{V} \left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_P$ és az izoterm kompresszibilitás $\kappa_T = -\frac{1}{V} \left(\frac{\partial V}{\partial P}\right)_T$ definícióit; így a keresett összefüggéshez jutunk.
- 6. feladat.** Írjuk fel az izobár hőtágulási együttható definícióját, és alkalmazzunk benne egy Maxwell-relációt: $\alpha = \frac{1}{V} \left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_P = -\frac{1}{V} \left(\frac{\partial S}{\partial P}\right)_T$. Itt a parciális T állandóságát követeli meg, és mivel $\lim_{T \rightarrow 0} S = 0$, a parciális értéke maga is zérus.
- 7. feladat.** Írjuk fel a kifejezést: $dH = T dS + V dP$, majd vegyük mindkét oldal P szerinti parciálisát T állandósága mellett. Ebből $\left(\frac{\partial H}{\partial P}\right)_T = T \left(\frac{\partial S}{\partial P}\right)_T + V$. Itt használjuk a Maxwell-relációt, miszerint $\left(\frac{\partial S}{\partial P}\right)_T = -\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_P$; ekkor $\left(\frac{\partial H}{\partial P}\right)_T = -T \left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_P + V = -TV\alpha + V = V(1 - T\alpha)$.